6.30 Def: Die Transponierte einer $m \times n$-Matrix $A = (a_{ij})_{ij}$ ist die $n \times m$-Matrix $A^T := (a_{ji})_{ij}$

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6.31 Notiz:

- $(A^T)^T = A$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(s \cdot A)^T = s \cdot (A^T)$ für $s \in K$
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ (vgl. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$)
- A invertierbar $\Leftrightarrow$ A^T invertierbar

(Zum vorletzten Punkt: Schreibe $[A]_{ij}$ für Einträge von A usw.

$$(A \cdot B)^T = \left(\left(\sum_j [A]_{ij} [B]_{jk} \right)_{i,k} \right)^T$$

$$= \left(\sum_j [A]_{kj} [B]_{ji} \right)_{i,k}$$

$$= \left(\sum_j [B^T]_{ij} [A^T]_{jk} \right)_{i,k} = B^T \cdot A^T \text{)}$$

6.32 Def.:

Sei $A = \left(\underline{s}_1, \ldots, \underline{s}_n\right) = \begin{pmatrix} \underline{z}_1^T \\ \vdots \\ \underline{z}_m^T \end{pmatrix}$ Spalten Zeilen

$\in \mathrm{Mat}_K(m \times n)$.

Spaltenrang$(A) := \dim_K \langle \underline{s}_1, \ldots, \underline{s}_n \rangle$

Zeilenrang$(A) := \dim_K \langle \underline{z}_1, \ldots, \underline{z}_m \rangle$

6.33 Satz („Rangsatz"):

Für jede Matrix gilt:

Spaltenrang = Rang = Zeilenrang

Beweis: $A \in \mathrm{Mat}_K(m \times n)$

$$f_A : K^n \longrightarrow K^m$$

(Spaltenrang = Rang)

Für Standardbasis $e_1, \dots, e_n$ von K^n gilt: $f_A(e_i) = s_i$ (siehe Hauptsatz 6.4)

Daher

$$\mathrm{im}(f_A) = \langle s_1, \dots, s_n \rangle \quad \Big| \dim$$
$$\mathrm{rk}(A) = \text{Spaltenrang}(A)$$

(Spaltenrang = Zeilenrang)

(i) Falls A in Normalform ist:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Spaltenrang} = \dim \langle e_1, \dots, e_r \rangle$$
$$= \text{Zeilenrang} \checkmark$$

Für allgemeines A gilt:

(ii) Spaltenrang invariant unter Zeilen- und Spaltentrafo ((i) + Korollar 6.22)

(iii) Zeilenrang invariant unter Zeilen- und Spaltentrafo:

Produkte von Elementarmatrizen

$$\text{Zeilenrang}(E \cdot A \cdot E')$$
$$= \text{Spaltenrang}((E \cdot A \cdot E')^T)$$
$$= \text{Spaltenrang}((E')^T \cdot A^T \cdot E^T)$$

immer noch Produkte von Elementarmatrizen

$$\overset{(ii)}{=} \text{Spaltenrang}(A^T)$$
$$= \text{Zeilenrang}(A)$$

Wähle E, E' so dass EAE' in Normalform ist. Dann folgt:

$$\text{Spaltenrang}(A) \overset{(ii)}{=} \text{Spaltenrang}(EAE')$$
$$\overset{(i)}{=} \text{Zeilenrang}(EAE')$$
$$\overset{(iii)}{=} \text{Zeilenrang}(A)$$

$\square$

6.34 Def: $A \in \mathrm{Mat}(m\times n)$ hat…
… vollen Spaltenrang, falls $\mathrm{Rang}(A) = n$
… vollen Zeilenrang, falls $\mathrm{Rang}(A) = m$
… vollen Rang, falls sie vollen Spaltenrang oder vollen Zeilenrang hat (falls also $\mathrm{Rang}(A) = \min\{m,n\}$).

Beispiel:

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

voller Spaltenrang ✓
nicht voller Zeilenrang

6.35 Satz:
A hat vollen Spaltenrang
$\iff$ A besitzt Linksinverses
A hat vollen Zeilenrang
$\iff$ A besitzt Rechtsinverses.

Ist $A \in \mathrm{Mat}(n\times n)$ (also quadratisch), sind beide Bedingungen äquivalent und es folgt:

$$\begin{aligned}\mathrm{rk}(A) = n &\iff A \text{ besitzt Linksinv.}\\ &\iff A \text{ besitzt Rechtsinv.}\\ &\iff A \text{ invertierbar.}\end{aligned}$$

Beweis:
Erste Äquivalenz folgt aus Rezept 6.29.
Zweite Äquivalenz folgt aus der ersten, denn (A besitzt ein Rechtsinverses
$\iff$ A^T besitzt ein Linksinverses) $\square$

6.36 Satz:
Ein n-Tupel von Vektoren $v_1, \dots, v_n \in K^m$ ist ...

... linear unabhängig $\iff$ $(v_1, \dots, v_n)$ hat vollen Spaltenrang (Rang $= n$)

... ein Erzeugendensystem von K^m $\iff$ $(v_1, \dots, v_n)$ hat vollen Zeilenrang (Rang $= m$)

... eine Basis $\iff$ $(v_1, \dots, v_n)$ ist invertierbar (insbes. $n = m$)

Beweis:
Sei $A = (v_1, \dots, v_n)$.

$$f_A : K^n \longrightarrow K^m$$

bildet Standardbasis $e_1, \dots, e_n$ von K^n ab auf $v_1, \dots, v_n$.

Satz 5.16 zeigt:

f_A Monomorphismus $\iff$ $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig

f_A Epimorphismus $\iff$ $v_1, \dots, v_n$ Erzeugendensystem.

Nutze nun wieder Blatt 3, Aufgabe 1, und Satz 6.35. $\square$